DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM VIII

Stanisław Turski

O pewnem uogólnieniu twierdzeń o istnieniu i jednotliwości całek równań hiperbolicznych typu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim; dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931, Tom VI za rok 1934, oraz Tomy VII i IX za rok 1935.

DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM VIII

Stanisław Turski

O pewnem uogólnieniu twierdzeń o istnieniu i jednotliwości całek równań hiperbolicznych typu $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1935
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazuje się w miarę potrzeby ogłaszania artykułów, pisanych w języku polskim: dotychczas ukazał się Tom I za rok 1922, Tom II za rok 1923, Tom III za rok 1927, Tom IV za rok 1928, Tom V za rok 1931, Tom VI za rok 1934, oraz Tomy VII i IX za rok 1935.



Stanisław Turski
(Kraków)

O pewnem uogólnieniu twierdzeń o istnieniu i jednotliwości całek równań hiperbolicznych typu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Wstęp.

Dla równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego typu hiperbolicznego postaci

$$\text{I} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, z, p, q),$$

gdzie $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, uzyskał pierwszy Picard [1]), w przypadku nieanalityczności funkcji $f(x, y, z, p, q)$, dowód istnienia i jednotliwości rozwiązania, spełniającego ponadto t. zw. warunki brzeżne. Picard zakłada w swych rozważaniach: 1°) ciągłość funkcji $f(x, y, z, p, q)$ w pewnym określonym zbiorze pięciowymiarowym, 2°) spełnianie w tymże zbiorze co do z, p, q przez funkcję f warunku Lipschitz'a

$$\text{II} \quad |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant M[|z-\bar{z}| + |p-\bar{p}| + |q-\bar{q}|],$$

gdzie M oznacza stałą dodatnią, oraz zakłada odpowiednie warunki dla funkcyj brzeżnych; w dowodach stosuje metodę kolejnych przy-

[1]) E. Picard: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et les approximations successives (Journal de Mathématiques t. VI. 1890). Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations differéntielles (Note I dans: G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. IV, p. 353; 1896).

bliżeń. Metoda Picard'a pozwala w przypadku równań typu eliptycznego na zastąpienie warunku Lipschitz'a w stosunku do funkcyj, będących prawemi stronami równań, warunkiem ogólniejszym, co wykazał Prof. Rosenblatt [1]) w szeregu prac.

W pracach tych pozostawiono bez zmiany klasyczne warunki Picard'a co do danych brzeżnych.

Prof. Wilkosz zaproponował mi zajęcie się problemem zredukowania danych brzeżnych, o ile możności, aż do założenia o funkcjach danych na brzegu, iż są Duhamelowskiemi [2]). Równocześnie zwrócił mi uwagę na możność zastosowania warunku ogólniejszego, niż warunek Lipschitz'a, do funkcyj będących prawemi stronami równań typu hiperbolicznego. W toku pracy okazało się wskazanem przebadanie najpierw przypadku, w którym funkcje dane na brzegu rozważanego obszaru są klasy D (t. j. posiadają pochodne) i w którym przyjmujemy warunek ogólniejszy od warunku Lipschitz'a (Tw. I).

Rezultaty tej części pracy przedstawiam w niniejszej rozprawie, pozostawiając sobie na przyszłość możność ogłoszenia wyników poszukiwań, mających na celu dalszą redukcję założeń.

W klasyfikacji przypadków danych brzeżnych idę za Picardem [3]), którego metodę kolejnych przybliżeń w pracy tej stosuję.

Praca zawiera rozważania dotyczące problemu I i II danych brzeżnych, przyczem problem II podany jest w sformułowaniu Kamke'go [4]).

P. P. Prof. Wilkoszowi i Prof. Ważewskiemu składam serdeczne podziękowanie za rady i uwagi, które od nich w ciągu pisania tej pracy otrzymałem.

---

[1]) A. Rosenblatt: Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des équations aux derivées partielles non linéaires du type elliptique (Ann. Scient. de l'ecole norm. super.). Sopra le equazioni *m*-armoniche... (Rend. della R. Accademia nazion. dei Lincei,

Vol. XIX, serie 6ª, 1⁰ sem. fasc. 4, 1934
Vol. XIX, „ „ fasc. 5, 1934 i inne.

[2]) W. Wilkosz: Some properties of derivative functions. (Fund. Mathematicae t. II, p. 145).

[3]) E. Picard: Leçons sur quelques types simples d'équations aux derivées partielles (Paris, Gauthier-Villars 1927, p. 121).

[4]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen. (Leipzig. Akad. Verlagsgeselschaft. 1930, s. 405).

Oznaczenia.

Zbiór trójwymiarowy, określony przez warunki $\left| \begin{array}{l} a < x \leqslant c \\ b < y \leqslant d \\ z \text{ dowolne} \end{array} \right|$
nazywać będziemy zbiorem Ω.

Zbiór dwuwymiarowy, określony przez nierówności $\begin{array}{l} a < x \leqslant c \\ b < y \leqslant d \end{array}$
nazywać będziemy prostokąten P.

Zbiór dwuwymiarowy, określony przez nierówności $\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant c \\ b \leqslant y \leqslant d \end{array}$
nazywać będziemy prostokątem $\overline{P}$.

W dalszym ciągu symbole Ω, P, $\overline{P}$ posiadają znaczenie powyższe [1]).

Twierdzenie I.

Równanie

(1)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f(x, y, z),$$

przy następujących założeniach:

1°, funkcja $f(x, y, z)$, występująca w równaniu (1), jest ciągła w zbiorze Ω,

2°, funkcja $f(x, y, z)$, występująca w równaniu (1), spełnia w zbiorze Ω nierówność następującą:

$$|f(x, y, z) - f(x, y, \overline{z})| \leqslant \frac{K|z - \overline{z}|}{(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\alpha}},$$

gdzie K jest stałą dodatnią i $0 < \alpha < 1$,

3°, istnieje funkcja $\omega(x, y)$ ciągła w $\overline{P}$, dla której zachodzi w P:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \int\limits_a^x \int\limits_b^y f(\xi, \eta, \omega(\xi, \eta)) \, d\xi \, d\eta = f(x, y, \omega(x, y)) \text{ [2])}$$

(z założenia tego wynika w szczególności, że $f(x, y, \omega(x, y))$ jest sumowalna w P) [3]),

---

[1]) Na oznaczenie przedziałów: $a \leqslant x \leqslant c$, $b \leqslant y \leqslant d$, $a < x \leqslant c$, $b < y \leqslant d$, $a < x < c$, $b < y < d$, używać będziemy często oznaczeń odpowiednio: $[a, c]$, $[b, d]$, $(a, c]$, $(b, d]$, (a, c), (b, d) i podobnie w innych przypadkach.

[2]) Występującą tu całkę rozumiemy jako lebesgue'owską całkę polową po prostokącie $a < \xi \leqslant x$, $b < \eta \leqslant y$, przyczem punkt (x, y) należy do P.

[3]) Początkowo figurowało założenie ograniczoności funkcyj $f(x, y, z_0(x, y))$ w P. P. Prof. Wilkosz zwrócił mi uwagę, że rozumowanie utrzymuje się prawie

4°, funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ są klasy D, pierwsza w $[a, c]$, druga w $[b, d]$, oraz jest $\varphi(a) = \psi(b)$,

posiada jedną i tylko jedną całkę $z(x, y)$ ważną w prostokącie P, ciągłą w $\bar{P}$ i taką, że $z(a, y) = \psi(y)$ w $[b, d]$, oraz $z(x, b) = \varphi(x)$ w $[a, c]$.

Dowód. Dowód zaczniemy od wykazania następujących lemmatów.

Lemmat 1. Jeżeli funkcja $F(x, y)$, ciągła w prostokącie P, spełnia w tym prostokącie nierówność:

$|F(x,y)| \leqslant \frac{A}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha}$, gdzie A jest stałą dodatnią i $0 < \alpha < 1$,

to funkcja $\int_b^{\bar{y}} F(x, \eta) d\eta$, gdzie $b < \bar{y} \leqslant d$, jest, jako funkcja zmiennej x, ciągła w przedziale $(a, c]$ i zachodzą związki ważne w P:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \int_b^y F(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = \int_b^y F(x, \eta) d\eta,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} \int_a^x \int_b^y F(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = F(x, y).$$

Z łatwością widać, że wszystkie całki występujące w tym lemmacie mają sens.

Niech x_0 będzie punktem z przedziału $(a, c]$; obieram liczbę β tak, by zachodziła nierówność

$$a < \beta < x_0 \leqslant c.$$

Oznaczmy, dla x należących do przedziału $(a, c]$, przez $\lambda(x)$ funkcję

$$\lambda(x) = \int_b^{\bar{y}} F(x, \eta) d\eta. \tag{2}$$

Wówczas dla $x > a$:

$$\lambda(x) - \lambda(x_0) = \int_b^{\bar{y}} (F(x, \eta) - F(x_0, \eta)) d\eta.$$

---

bez zmian, jeżeli założymy sumowalność funkcji $f(x, y, z_0(x, y))$ w P, co wynika z przyjętego obecnie założenia 3°. Co do znaczenia funkcji $z_0(x, y)$ por. równość (4) dalszego ciągu.

Niech będzie teraz σ liczbą spełniającą nierówność $b < \sigma < \bar{y}$. Możemy napisać:

$$\lambda(x) - \lambda(x_0) = \int_b^\sigma (F(x,\eta) - F(x_0,\eta))d\eta + \int_\sigma^{\bar{y}} (F(x,\eta) - F(x_0,\eta))d\eta,$$

a więc

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqslant \int_b^\sigma |F(x,\eta)|d\eta + \int_b^\sigma |F(x_0,\eta)|d\eta +$$
$$+ \int_\sigma^{\bar{y}} |F(x,\eta) - F(x_0,\eta)|d\eta.$$

Na podstawie założonej co do funkcji $F(x, y)$ nierówności będzie w dalszym ciągu:

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqslant \frac{A}{(x-a)^\alpha}\int_b^\sigma \frac{d\eta}{(\eta - b)^\alpha} + \frac{A}{(x_0-a)^\alpha}\int_b^\sigma \frac{d\eta}{(\eta - b)^\alpha} +$$
$$+ \int_\sigma^{\bar{y}} |F(x,\eta) - F(x_0,\eta)|d\eta \leqslant \frac{A}{1-\alpha}(\sigma - b)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{(x-a)^\alpha} + \frac{1}{(x_0-a)^\alpha}\right) +$$
$$+ \int_\sigma^{\bar{y}} |F(x,\eta) - F(x_0,\eta)|d\eta.$$

A zatem dla $\beta \leqslant x \leqslant c$ mieć będziemy

$$(3) \qquad |\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqslant \frac{2A}{(1-\alpha)(\beta-a)^\alpha}(\sigma - b)^{1-\alpha} +$$
$$+ \int_\sigma^{\bar{y}} |F(x,\eta) - F(x_0,\eta)|d\eta.$$

Niech będzie $\varepsilon > 0$; dobieramy tak σ, $(b < \sigma < \bar{y})$, żeby $\frac{2A}{(1-\alpha)(\beta-a)^\alpha}(\sigma - b)^{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Z jednostajnej ciągłości funkcji $F(x, y)$ w prostokącie: $\beta \leqslant x \leqslant c$, $\sigma \leqslant y \leqslant \bar{y}$, wynika, że możemy wyznaczyć tak $\delta > 0$, iż dla $|x - x_0| < \delta$ zachodzi w tym prostokącie $|F(x,y) - F(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2(\bar{y}-\sigma)}$.

Dla $|x - x_0| < \delta$ mamy zatem według (3):

$$|\lambda(x) - \lambda(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(\bar{y} - \sigma)}(\bar{y} - \sigma) = \varepsilon.$$

Uwzględniając określenie (2) funkcji $\lambda(x)$ widzimy, że funkcja $\int_b^{\bar{y}} F(x, \eta)d\eta$ jest funkcją ciągłą zmiennej x w przedziale $(a, c]$.

Z okazanej powyżej ciągłości funkcji $\int_b^{\bar{y}} F(x, \eta)d\eta$ w przedziale $(a, c]$ wynika, że w tymże przedziale zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x\int_b^y F(\xi, \eta)d\xi\, d\eta = \int_b^y F(x, \eta)\, d\eta.$$

Funkcja $F(x, y)$ jest z założenia ciągłą w prostokącie P, zatem mamy

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_b^y F(x, y)\, d\eta = F(x, y)$$

wreszcie

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\int_a^x\int_b^y F(\xi, \eta)d\xi d\eta = F(x, y).$$

Udowodniliśmy więc nasz lemmat.
Uzasadnimy obecnie

Lemmat 2. Jeżeli funkcja $g(x, y)$ jest ciągła w $\bar{P}$, to funkcja $f(x, y, g(x, y))$ jest ciągła i sumowalna w P.

Rzeczywiście funkcja $f(x, y, g(x, y))$ jest wobec ciągłości $g(x, y)$ w $\bar{P}$ i założenia 1^0 ciągła w P. Oznaczmy przez ω funkcję spełniającą założenie 3^0. Możemy napisać równość ważną w P:

$$f(x, y, g(x, y)) = f(x, y, g(x, y)) - f(x, y, \omega(x, y)) + f(x, y, \omega(x, y)),$$

a zatem mamy:

$$|f(x, y, g(x, y))| \leqslant |f(x, y, g(x, y)) - f(x, y, \omega(x, y))| + |f(x, y, \omega(x, y))|,$$

w dalszym ciągu, stosując nierówność z założenia 2^0, mieć będziemy:

$$|f(x, y, g(x, y))| \leqslant \frac{K|g(x, y) - \omega(x, y)|}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha} + |f(x, y, \omega(x, y))|.$$

Ale różnica $g(x, y) - \omega(x, y)$ jest funkcją ciągłą, a więc i ogra-

niczoną w $\bar{P}$, jest więc również ograniczoną w P i dostajemy z ostatniej nierówności w dalszym ciągu nierówność:

$$|f(x, y, g(x, y))| \leqslant \frac{KC}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha} + |f(x, y, \omega(x, y))|,$$

(C stała dodatnia),

ta zaś nierówność dowodzi, że funkcja $f(x, y, g(x, y))$ jest sumowalna w P, ponieważ funkcja $\frac{1}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha}$ jest sumowalna w P i ponieważ przyjęliśmy założenie 3^0.

Lemmat 3. Jeżeli oznaczymy przez $z_0(x, y)$ w prostokącie $\bar{P}$:

$$(4) \qquad z_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(a)$$

i ograniczymy się do rozwiązań ciągłych w $\bar{P}$, to równanie (1) jest równoważne następującemu równaniu całkowemu:

$$(5) \qquad z(x, y) = z_0(x, y) + \int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta.$$

W samej rzeczy, przypuśćmy, że funkcja $z(x, y)$ jest całką równania (1), spełniającą warunki twierdzenia I. Jest więc $z(x, y)$ ciągła w $\bar{P}$, a zatem funkcja $f(x, y, z(x, y))$ jest według lemmatu 2 ciągłą i sumowalną w P. Niech δ_1, δ_2 będą liczbami dodatniemi, takiemi, że $a+\delta_1 \leqslant c$, $b+\delta_2 \leqslant d$; spowodu ciągłości $f(x, y, z(x, y))$ w P i wobec równania (1) mamy:

$$\int_{a+\delta_1}^x \int_{b+\delta_2}^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta = \int_{a+\delta_1}^x \int_{b+\delta_2}^y \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta} d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{a+\delta_1}^x \left(\frac{\partial z(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial z(\xi, b+\delta_2)}{\partial \xi} \right) d\xi = [z(\xi, y) - z(\xi, b+\delta_2)]_{a+\delta_1}^x =$$

$$= z(x, y) - z(a+\delta_1, y) - z(x, b+\delta_2) + z(a+\delta_1, b+\delta_2),$$

ale funkcja $z(x, y)$ jest ciągła w $\bar{P}$ z założenia, a funkcja $f(x, y, z(x, y))$, jak to wyżej wykazaliśmy, sumowalna w P, a zatem możemy przejść z δ_1 i δ_2 do granicy 0 i dostajemy równość ważną w P:

$$\int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta = z(x, y) - z(a, y) - z(x, b) + z(a, b) =$$

$$= z(x, y) - z_0(x, y).$$

Równość ostatnia dowodzi, że funkcja $z(x, y)$ spełnia również równanie całkowe (5).

Naodwrót, rozwiązanie równania (5) ciągłe w $\overline{P}$, jest całką równania (1).

Istotnie, uwzględniając założenie 3^0, możemy napisać równanie (5) w postaci:

$$(6) \quad z(x, y) = z_0(x, y) + \int_a^x \int_b^y [f(\xi, \eta, z(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, \omega(\xi, \eta))] d\xi d\eta + $$
$$+ \int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta, \omega(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

Funkcje $z(x, y)$ i $\omega(x, y)$ są ciągłe w $\overline{P}$, zatem funkcja

$$A(x, y) = f(x, y, z(x, y)) - f(x, y, \omega(x, y))$$

jest ciągła w P, dalej według założenia 2^0 mamy:

$$|A(x, y)| \leqslant \frac{K|z(x, y) - \omega(x, y)|}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha},$$

a więc, spowodu ciągłości funkcyj $z(x, y)$ i $\omega(x, y)$ w $\overline{P}$, w dalszym ciągu:

$$|A(x, y)| \leqslant \frac{K\overline{C}}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha} \qquad (\overline{C} \text{ stała dodatnia}).$$

Widzimy tedy, że funkcja $A(x, y)$ spełnia założenia lemmatu 1 (ze stałą $A = K\overline{C}$), a więc, uwzględniając jeszcze założenia 3^0 i 4^0 i stosując lemmat 1, dostajemy [1]) dla prostokątu P:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z);$$

czyli wykazaliśmy, że ciągłe w $\overline{P}$ rozwiązanie równania (5) jest całką równania (1).

Udowodniliśmy zatem lemmat 3.

Wystarczy nam, jak z powyższych rozważań widać, wykazać

[1]) Zmianę porządku różniczkowania w stosunku do lemmatu 1, wobec ciągłości $f(x, y, z)$ w Ω, usprawiedliwia znane twierdzenie Schwarz'a.

istnienie ciągłego w $\bar{P}$ rozwiązania równania (5), aby mieć zapewnione istnienie całki równania (1). W celu wykazania istnienia rozwiązania równania całkowego (5), użyjemy metody kolejnych przybliżeń.

Zauważmy naprzód, że stosując do funkcji $z_0(x, y)$, określonej przez (4) i wobec założenia 4⁰ ciągłej w $\bar{P}$, lemmat 2, otrzymamy, iż funkcja $f(x, y, z_0(x, y))$ jest sumowalna w P. Funkcję $z_0(x, y)$ obieramy za pierwszą funkcję ciągu kolejnych przybliżeń.

Połóżmy dalej

$$z_1(x, y) = z_0(x, y) + \int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta, z_0(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta,$$

widać, że tak określona funkcja jest ciągła w $\bar{P}$ i że w P zachodzi związek:

$$(7) \qquad |z_1(x, y) - z_0(x, y)| \leqslant \int_a^x \int_c^y |f(\xi, \eta, z_0(\xi, \eta))|\, d\xi\, d\eta \leqslant M,$$

gdzie przez M oznaczyliśmy stałą dodatnią, istnienie której zapewnia nam wykazana sumowalność funkcji $f(x, y, z_0(x, y))$ w P.

Połóżmy

$$(8) \qquad z_{n+1}(x, y) = z_0(x, y) + \int_a^x \int_b f(\xi, \eta, z_n(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta$$

i przypuśćmy teraz, że aż do pewnego n całkowitego funkcje, $z_n(x, y)$ są ciągłe w $\bar{P}$.

Spowodu ciągłości $z_n(x, y)$ w $\bar{P}$, funkcja $f(x, y, z_n(x, y))$ jest ciągła i sumowalna w P, jak to z lemmatu 2 wynika, a zatem i funkcja $z_{n+1}(x, y)$ jest określona i ciągła w $\bar{P}$. Wobec tego otrzymujemy dla każdego całkowitego n z wzoru (8) funkcje $z_{n+1}(x, y)$ ciągłe w $\bar{P}$.

Przejdźmy teraz do wykazania jednostajnej zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń $z_n(x, y)$ w $\bar{P}$. Załóżmy, że dla pewnego n całkowitego zachodzi w $\bar{P}$ nierówność:

$$(9) \qquad |z_n(x, y) - z_{n-1}(x, y)| \leqslant \frac{K^{n-1} M [(x-a)(y-b)]^{(n-1)(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 (2-2\alpha)^2 \ldots [n-1-(n-1)\alpha]^2}$$

(dla $n = 1$, przyjmujemy mianownik $= 1$),

nierówność ta jest, jak wskazuje (7) spełniona dla $n = 1$.

Według (8) mamy w zbiorze $\bar{P}$:

$$|z_{n+1}(x,y)-z_n(x\,y)|\leqslant\int\limits_a^x\int\limits_b^y|f(\xi,\eta,z_n(\xi,\eta))-f(\xi,\eta,z_{n-1}(\xi,\eta))|\,d\xi\,d\eta,$$

a w dalszym ciągu według 2° i (9) w zbiorze P:

$$|z_{n+1}(x,y)-z_n(x,y)|\leqslant\int\limits_a^x\int\limits_b^y\frac{K|z_n-z_{n-1}|}{(\xi-a)^\alpha(\eta-b)^\alpha}\,d\xi\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^x\int\limits_b^y\frac{K^nM[(\xi-a)(y-b)]^{(n-1)(1-\alpha)-\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-1-(n-1)\alpha]^2}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\int\limits_a^x K^nM\frac{(\xi-a)^{(n-1)(1-\alpha)-\alpha}(y-b)^{(n-1)(1-\alpha)+1-\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-1-(n-1)\alpha]^2[n-1)(1-\alpha)+1-\alpha]}\,d\xi$$

$$=K^nM\frac{[(x-a)(y-b)]^{n-n\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-n\alpha]^2},$$

a zatem w zbiorze P

(10) $$|z_{n+1}(x,y)-z_n(x,y)|\leqslant\frac{K^nM[(x-a)(y-b)]^{n-n\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-n\alpha]^2}.$$

Nierówność ta utrzymuje się też w zbiorze $\bar{P}$, ponieważ funkcje obu stron nierówności (10) są ciągłe w $\bar{P}$.

Wobec nierówności (7) i (10) wnioskujemy, że nierówność (9) zachodzi dla każdego n całkowitego od 1 począwszy.

Szereg funkcyjny:

(11) $$z_0(x,y)+(z_1(x,y)-z_0(x,y))+(z_2(x,y)-z_1(x,y))+\ldots$$

jest w $\bar{P}$ jednostajnie zbieżny, posiada bowiem majorantę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K^{n-1}M[(c-a)(d-b)]^{(n-1)(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-1-(n-1)\alpha]^2},$$

której bezwzględna zbieżność wynika natychmiast z zastosowania kryterjum d'Alembert'a.

Oznaczmy granicę szeregu (11) przez $z(x,y)$; będzie ona funkcją ciągłą w $\bar{P}$, gdyż takiemi są elementy szeregu (11).

Szereg funkcyjny:

(12) $$f(x,y,z_0(x,y))+(f(x,y,z_1(x,y))-f(x,y,z_0(x,y))+\ldots$$

jest w P jednostajnie zbieżny.

Mamy bowiem, stosując 2° i (9):

$$|f(x, y, z_n(x, y)) - f(x, y, z_{n-1}(x, y))| \leqslant \frac{K|z_n - z_{n-1}|}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K^n M[(x-a)(y-b)]^{(n-1)(1-\alpha)-\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-1-(n-1)\alpha]^2},$$

a zatem szereg (12) posiada w P majorantę bezwzględnie zbieżną:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n M[(c-a)(d-b)]^{n-1-n\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2\ldots[n-1-(n-1)\alpha]^2}.$$

Graniczna funkcja szeregu (12) jest zatem w P ciągłą i sumowalną. Możemy więc, przechodząc do granicy, napisać według (8)

$$(13) \qquad z(x, y) = z_0(x, y) + \int_a^x \int_b^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta)) d\xi\, d\eta.$$

Granica szeregu (11) przedstawia więc ciągłe w $\overline{P}$ rozwiązanie równania (13), zatem według lemmatu 3, określenia (4) i założenia 4° funkcja $z(x, y)$ jest całką równania (1), spełniającą wymienione w twierdzeniu I warunki brzeżne.

Wykazaliśmy zatem istnienie całki równania (1).

Przechodzimy do dowodu jednotliwości. Przypuśćmy, że prócz całki $z(x, y)$ istnieje jeszcze druga całka $\mathfrak{z}(x, y)$, spełniająca warunki twierdzenia I.

Z lemmatu 3 wynika, że funkcja $\mathfrak{z}(x, y)$ jest także rozwiązaniem równania całkowego (5), a więc w szczególności funkcja $f(x, y, \mathfrak{z}(x, y))$ jest sumowalna w P.

Istnieje zatem taka stała N, dodatnia, że zachodzi w P związek:

$$(14) \qquad \int_a \int_b^y |f(\xi, \eta, \mathfrak{z}(\xi, \eta))| d\xi\, d\eta \leqslant N.$$

Ponieważ $\mathfrak{z}(x, y)$ spełnia w $\overline{P}$ równanie (13), przeto:

$$(15) \qquad |\mathfrak{z}(x, y) - z_0(x, y)| \leqslant \int_a^x \int_b^y |f(\xi, \eta, \mathfrak{z}(\xi, \eta))| d\xi\, d\eta \leqslant N.$$

Przypuśćmy, że dla pewnego n całkowitego zachodzi w $\bar{P}$:

$$(16) \qquad |\mathfrak{z}(x, y) - z_n(x, y)| \leqslant \frac{K^n N[(x-a)(y-b)]^{n-n\alpha}}{(1-\alpha)^2(2-2\alpha)^2 \ldots [n-n\alpha]^2}$$

(dla $n=0$, przyjmujemy mianownik $=1$),

dla $n+1$ dostajemy z uwagi na to, że funkcja $\mathfrak{z}$ spełnia równanie (13), a funkcja z_{n+1} równanie (8):

$$|\mathfrak{z}(x, y) - z_{n+1}(x, y)| \leqslant \int_a^x \int_b^y |f(\xi, y, \mathfrak{z}(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, z_n(\xi, \eta))| \, d\xi \, d\eta,$$

a stąd, uwzględniając 2^0 i (16), rachunkiem podobnym do przeprowadzonego w celu wykazania nierówności (10), przekonujemy się, że nierówność (16) słuszna jest dla wszystkich n całkowitych. Po prawej stronie (16) występuje wyraz szeregu zbieżnego w P, a zatem mamy w P: $\lim_{n/\infty} |\mathfrak{z}(x, y) - z_n(x, y)| = |\mathfrak{z}(x, y) - z(x, y)| = 0$, czyli, że zachodzi, ze względu na ciągłość $z(x, y)$ i $\mathfrak{z}(x, y)$ w $\bar{P}$, równość ważna w $\bar{P}$

$$(17) \qquad \mathfrak{z}(x, y) = z(x, y).$$

Twierdzenie I udowodniliśmy zatem w zupełności.

Uwaga. Zauważymy tutaj, że do wykazania istnienia rozwiązania równania (5) zbędne jest założenie 4^0, wystarcza tylko założenie, że funkcje φ i ψ są ciągłe w rozważanych przedziałach [1]).

Przypadek szczególny twierdzenia I.

Rozważmy równanie.

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\Phi(x, y, z)}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Załóżmy, że funkcja $\Phi(x, y, z)$ jest ciągła w $\bar{\Omega}$ [2]) i spełnia w $\bar{\Omega}$ nierówność

$$(2') \qquad |\Phi(x, y, z) - \Phi(x, y, \bar{z})| \leqq K|z - \bar{z}|, \quad (K \text{ stała dodatnia}).$$

---

[1]) Jeżelibyśmy założyli, że istnieje funkcja ciągła ω taka, że funkcja $f(x, y, \omega(x, y))$ jest sumowalna w P i pominęli równość występującą w założeniu 3^0, to możnaby podać przykład równania różniczkowego spełniającego wszystkie pozostałe warunki twierdzenia 1, a pomimo to nierównoważnego równaniu całkowemu (5). Przykład taki podał P. Prof. Ważewski.

[2]) Przez $\bar{\Omega}$ rozumiemy zbiór, określony przez warunki: $a \leqslant x \leqslant c$, $b \leqslant y \leqslant d$, z dowolne.

(Nierówność (2') jest spełniona, gdy np. funkcja $\Phi(x, y, z)$ posiada w $\overline{\Omega}$ ograniczoną pochodną cząstkową względem z).

Niech funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ będą klasy (D) odpowiednio w przedziałach $[a, c]$ i $[b, d]$, oraz $\varphi(a) = \psi(b)$. Przy tych założeniach równanie (1') posiada jedną i tylko jedną całkę $z(x, y)$, ciągłą w $\overline{P}$, spełniającą równanie w P i taką, że $z(a, y) = \psi(y)$ w $[b, d]$ i $z(x, b) = \varphi(x)$ w $[a, c]$.

Dowód. W samej rzeczy: założenie 1^0 tw. I jest spełnione, gdyż mamy tu $f(x, y, z) = \dfrac{\Phi(x, y, z)}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha}$, a więc $f(x, y, z)$ jest ciągłą w Ω. Założenie 2^0 jest również spełnione, co wynika z (2') i przyjętego kształtu funkcji $f(x, y, z)$. Założenie 4^0 przyjęliśmy i w tym przypadku.

Obierzmy funkcję $\omega(x, y)$, o której mowa w założeniu 3^0, równą 1 w prostokącie $\overline{P}$. Jest ona ciągłą w $\overline{P}$ i mamy

$$f(x, y, \omega(x, y)) = f(x, y, 1) = \frac{\Phi(x, y, 1)}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha}.$$

Ale $\Phi(x, y, z)$ jest ciągłą w Ω, zatem $\Phi(x, y, 1)$ ciągłą w $\overline{P}$ i tembardziej $\Phi(x, y, 1)$ ciągłą i ograniczoną w P, a zatem jest

$$|f(x, y, 1| = \left| \frac{\Phi(x, y, 1)}{(x-a)^\alpha (y-b)^\alpha} \right| \leqslant \frac{A}{(x-a)^\alpha (x-b)^\alpha}.$$

Widzimy więc, że funkcja $f(x, y, 1)$ spełnia założenia lemmatu 1, a co za tem idzie, że istnieje funkcja $\omega(x, y)$ (w tym przypadku np. równa identycznie 1 w $\overline{P}$) spełniającą warunek 3^0 tw. I. Wszystkie tedy założenia tw. I są w obecnie rozważanym przypadku spełnione, a więc wniosek, wypowiedziany o równaniu (1') jest uzasadniony.

Analogiczne twierdzenia można otrzymać, rozważając równania, których prawe strony zależą jeszcze od p lub od q, ale nie od obu jednocześnie. W przypadku, gdy funkcja prawostronna równania zależy od p i od q natrafiamy, chcąc zachować zamiast warunku Lipschitz'a warunek ogólniejszy, analogiczny do warunku 2^0, na trudności w wykazaniu zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń. Na możność traktowania równania o prawej stronie zależnej od pięciu zmiennych zwrócił mi uwagę P. Prof. Ważewski.

Do takiego równania przechodzimy obecnie.

§ 2.

Zwróćmy uwagę na równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q). \tag{18}$$

Spowodu trudności, o których wspomnieliśmy, udowodnimy spoczątku w twierdzeniu pomocniczem II istnienie i jedyność rozwiązania równania (18) w prostokącie o bokach równoległych do osi układu i wymiarach nieprzekraczających pewnej liczby $\delta > 0$, a następnie w twierdzeniu III rozszerzymy ważność twierdzenia na prostokąt o wymiarach dowolnych.

Twierdzenie pomocnicze II. Niech funkcja f występująca w równaniu (18) będzie ciągła w zbiorze 5-cio wymiarowym T, określonym przez warunki:

$$(T) \quad \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \\ z, p, q \text{ dowolne,} \end{array}$$

(zbiór dwuwymiarowy, określony przez pierwsze dwie nierówności z zespołu warunków (T), będziemy w dalszym ciągu nazywać prostokątem P) przyczem $b - a \leqslant \delta$, $d - c \leqslant \delta$, gdzie

$$0 < \delta < \left(\sqrt{1 + \frac{1}{A}} - 1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

i A oznacza stałą występującą w (19); niech ponadto funkcja f spełnia w zbiorze T' pięciowymiarowym, określonym przez warunki

$$(T') \quad \begin{array}{c} a < x \leqslant b \\ c < y \leqslant d \\ z, p, q \text{ dowolne,} \end{array}$$

nierówność

$$|f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \tag{19}$$

$$\leqslant A\left(\frac{|z - \bar{z}|}{(x - a)^\alpha (y - c)^\alpha} + \frac{|p - \bar{p}|}{(y - c)^\alpha} + \frac{|q - \bar{q}|}{(x - a)^\alpha}\right) \text{ (}A\text{ jest stałą dodatnią);}$$

niech wreszcie funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ będą klasy $C^{(1)}$ [1]) odpowiednio w przedziałach $[a, b]$ i $[c, d]$ i spełniają równość $\varphi(a) = \psi(c)$.

Przy tych założeniach równanie (18) posiada jedną i tylko jedną całkę klasy $C^{(1)}$ w prostokącie P, spełniającą warunki $z(a, y) = \psi(y)$ i $z(x, c) = \varphi(x)$.

---

[1]) Funkcja jest klasy $C^{(1)}$ w zbiorze Z jeżeli posiada w tym zbiorze ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego.

Dowód. Zaczniemy od dowodu istnienia całki. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia I tworzymy ciąg kolejnych przybliżeń:

$$
(20)\quad \begin{aligned} & z_0(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(a) \\ & z_n(x,y) = z_0(x,y) + \int_a^x \int_c^y f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi,\eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta \end{aligned}
$$

Funkcje $z_n(x, y)$, określone przez wzory (20) mają sens w prostokącie P, bowiem funkcja $f\left(x, y, z_{n-1}(x,y), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$, jako funkcja złożona zmiennych x i y, jest na skutek przyjętych o funkcji $f(x, y, z, p, q)$ i funkcjach $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ założeń ciągła w prostokącie P; dalej funkcje $z_n(x, y)$ są na skutek ciągłości funkcji podcałkowej we wzorach (20), klasy $C^{(1)}$, a na skutek wyboru funkcji $z_0(x, y)$, redukują się przy $x = a$ do $\psi(y)$ i przy $y = c$ do $\varphi(x)$.

Różniczkując funkcję $z_n(x, y)$, otrzymujemy na jej pochodne cząstkowe wzory:

$$
(21)\quad \begin{aligned} & \frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} + \int_c^y f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi,\eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\eta, \\ & \frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y} + \int_a^x f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi,\eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\xi. \end{aligned}
$$

Oznaczając przez K kres górny funkcji $\left|f\left(x, y, z_0(x,y), \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}\right)\right|$ w prostokącie P, mamy według (20) i (21):

$$
(22)\quad |z_1(x,y) - z_0(x,y)| \leqslant \int_a^x \int_c^y \left| f\left(\xi, \eta, z_0(\xi,\eta), \frac{\partial z_0}{\partial \xi}, \frac{\partial z_0}{\partial \eta}\right)\right| d\xi\, d\eta \leqslant \\ \leqslant K(x-a)\,(y-c),
$$

$$
(22')\quad \left| \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial x} \right| \leqslant \int_c^y \left| f\left(\xi, \eta, z_0(\xi,\eta), \frac{\partial z_0}{\partial \xi}, \frac{\partial z_0}{\partial \eta}\right)\right| d\eta \leqslant K(y-c),
$$

$$
(22'')\quad \left| \frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial z_0(x,y)}{\partial y} \right| \leqslant \int \left| f\left(\xi, \eta, z_0(\xi,\eta), \frac{\partial z_0}{\partial \xi}, \frac{\partial z_0}{\partial \eta}\right)\right| d\xi \leqslant K(x-a).
$$

Załóżmy, że dla pewnego całkowitego n zachodzą nierówności:

$$
(23)\quad |z_n(x,y) - z_{n-1}(x,y)| \leqslant \\ \leqslant A^{n-1} K(x-a)(y-c)\,[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^{n-1},
$$

$$(23') \qquad \left|\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}(x,y)}{\partial x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A^{n-1} K(y-c)\,[[x-c)\,(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^{n-1},$$

$$(23'') \qquad \left|\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial z_{n-1}(x,y)}{\partial y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A^{n-1} K(x-a)\,[[x-a)\,(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^{n-1}.$$

Nierówności (23), (23′), 23″) zachodzą, jak widać z (22), (22′), (22″) dla $n=1$.

Dla $n+1$ otrzymujemy z (20):

$$|z_{n+1}(x,y) - z_n(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x\int_c^y \left| f\left(\xi,\eta)\, z_n(\xi,\eta), \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right) - f\left(\xi,\eta, z_{n-1}(\xi,\eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right)\right| d\xi\, d\eta,$$

a według (19) i nierówności (23), (23′), 23″) w dalszym ciągu:

$$|z_{n+1}(x,y) - z_n(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x\int_c^y A\left(\frac{|z_n - z_{n-1}|}{(\xi-a)^\alpha(\eta-c)^\alpha} + \frac{\left|\dfrac{\partial z_n}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right|}{(\eta-c)^\alpha} + \frac{\left|\dfrac{\partial z_n}{\partial \eta} - \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right|}{(\xi-a)^\alpha}\right) d\xi\, d\eta$$

$$\leqslant A^n K \int_n^x\int_c^y \left\{\frac{(\xi-a)(\eta-c)[[(\xi-a)(\eta-c)]^{1-\alpha} + (\eta-c)^{1-\alpha} + (\xi-a)^{1-\alpha}]^{n-1}}{(\xi-a)^\alpha\,(\eta-c)^\alpha}\right.$$

$$+ \frac{(\eta-c)\,[[(\xi-a)\,(\eta-c)]^{1-\alpha} + (\eta-c)^{1-\alpha} + (\xi-a)^{1-\alpha}]^{n-1}}{(\eta-c)^\alpha}$$

$$\left. + \frac{(\xi-a)\,[[(\xi-a)\,(\eta-c)]^{1-\alpha} + (\eta-c)^{1-\alpha} + (\xi-a)^{1-\alpha}]^{n-1}}{(\xi-a)^\alpha}\right\} d\xi\, d\eta =$$

$$= A^n K \int_a^x\int_c^y [[(\xi-a)(\eta-c)]^{1-\alpha} + (\eta-c)^{1-\alpha} + (\xi-a)^{1-\alpha}]^n\, d\xi\, d\eta =$$

$$= A^n K \int_a^x\int_c^y \left(\sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} (\xi-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (\eta-c)^{(1-\alpha)(k_1+k_2)}\right) d\xi\, d\eta \; ^{1)},$$

przyczem sumowanie rozciągnięto na wszystkie układy liczb całkowitych nieujemnych k_1, k_2, k_3, takie, że: $k_i \leqslant n$ oraz $k_1+k_2+k_3=n$.

---

[1]) Por. E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, II Auflage 1927, p. 59.

Przekształcając dalej, otrzymujemy:

$$|z_{n+1}(x, y) - z_n(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant A^n K \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \int_a^x \int_c^y (\xi - a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (\eta - c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= A^n K \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \int_a^x (\xi - a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} \frac{(y - c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1}}{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1}\, d\xi =$$

$$= A^n K \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \frac{(x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)+1} (y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1}}{[(1-\alpha)(k_2+k_3)+1]\,[(1-\alpha)(k_1+k_3)+1]} =$$

$$= A^n K (x-a)(y-c) \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \frac{(x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)}}{[(1-\alpha)(k_2+k_3)+1]\,[(1-\alpha)(k_1+k_3)+1]}$$

ponieważ jednak zachodzi nierówność

$$[(1-\alpha)(k_2+k_3)+1]\,[(1-\alpha)(k_1+k_3)+1] > 1,$$

przeto:

$$|z_{n+1}(x,y) - z_n(x,y)| \leqslant$$

$$A^n K (x-a)(y-c) \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_2!} (x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)}$$

i ostatecznie:

$$(24) \qquad |z_{n+1}(x, y) - z_n(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant A^n K (x-a)(y-c) \left[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + x - a)^{1-\alpha} \right]^n.$$

Dla pochodnych cząstkowych funkcji $z_{n+1}(x, y)$ otrzymujemy podobnie:

$$\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \leqslant \int_c^y \left| f\left(\xi, \eta, z_n(\xi, \eta), \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right) - f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi, \eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) \right| d\eta$$

$$\leqslant A^n K \int_c^y [[(\xi - a)(\eta - c)]^{1-\alpha} + (\eta - c)^{1-\alpha} + (\xi - a)^{1-\alpha}]^n\, d\eta$$

$$= A_n K \int_c^y \left(\sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} (\xi - a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (\eta - c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)} \right) d\eta$$

$$= A^n K \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \frac{(x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1}}{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1}$$

$$= A^n K (y-c) \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \frac{(x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)} (y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_3)}}{(1-\alpha)(k_2+k_3)+1},$$

ponieważ zachodzi nierówność

$$(1-\alpha)(k_2+k_3)+1 \geqslant 1,$$

przeto

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \leqslant A^n K(y-c) \sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}(x-a)^{(1-\alpha)(k_1+k_3)}(y-c)^{(1-\alpha)(k_2+k_1)},$$

czyli ostatecznie

$$(25) \qquad \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}-\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \leqslant A^n K(y-c)[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha}+(y-c)^{1-\alpha}+(x-a)^{1-\alpha}]^n.$$

Identyczny rachunek dla pochodnych cząstkowych względem y da nam

$$(26) \qquad \left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}-\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| \leqslant A^n K(x-a)[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha}+(y-c)^{1-\alpha}+(x-a)^{1-\alpha}]^n.$$

Nierówności (24), (25), (26), wobec nierówności (22), (22′), (22″), zapewniają, że nierówności (23), (23′), (23″) zachodzą dla każdego całkowitego n.

Weźmy obecnie pod uwagę nierówność:

$$(27) \qquad A\,[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha}+(y-c)^{1-\alpha}+(x-a)^{1-\alpha}] < 1.$$

Przenosząc początek układu spółrzędnych do punktu (a, c) i nie zmieniając kierunku osi, przyrównajmy lewą stronę nierówności (27) do jedności. Otrzymamy, oznaczając spółrzędne w nowym układzie przez ξ, η:

$$(\xi\eta)^{1-\alpha}+\eta^{1-\alpha}+\xi^{1-\alpha}=\frac{1}{A},$$

a w dalszym ciągu

$$(28) \qquad \eta=\left(\frac{\frac{1}{A}-\xi^{1-\alpha}}{1+\xi^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Z wzoru (28) widać z łatwością, że łuk krzywej o tem równaniu przecina oś $\xi=0$ w punkcie $\left(0, \frac{1}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)$, a oś $\eta=0$ w punkcie $\left(\frac{1}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}, 0\right)$. W obszar położony w pierwszej ćwiartce układu (ξ, η) i ograniczony osiami układu oraz łukiem krzywej o równaniu (28) można[1]) wpisać kwadrat, którego jeden wierzchołek leży

[1]) Wobec symetrji krzywej o równaniu (28) względem prostej $\eta=\xi$.

w początku układu, a przeciwległy mu na krzywej (28). Otrzymamy równanie na odciętą wierzchołka kwadratu leżącego na krzywej, kładąc we wzorze (28) $\xi = \eta$; równanie to ma postać: $A\xi^{2(1-\alpha)} + 2A\xi^{1-\alpha} - 1 = 0$, a dodatni pierwiastek tego równania

(29) $$\bar{\xi} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{A}} - 1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

oznacza odciętą wierzchołka kwadratu, o którym była mowa.

Powracając do układu (x, y) widzimy, że dla punktów prostokąta, którego wierzchołek leży w punkcie (a, c), boki są równoległe do osi układu i długości boków nie przekraczają liczby δ $(0 < \delta < \bar{\xi})$, nierówność (27) jest spełniona. Ponieważ prostokąt, który oznaczyliśmy przez P jest takim właśnie prostokątem, przeto szereg o wyrazach nieujemnych

(30) $$\sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1}K[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^{n-1},$$

jako szereg geometryczny, jest dla wszystkich punktów prostokąta P zbieżny.

Z zbieżności szeregu (30) i wzorów (23), (23'), (23'') wynika, że szeregi, których wyrazami są funkcje ciągłe:

(31) $$z_0(x, y) + (z_1(x, y) - z_0(x, y)) + (z_2(x, y) - z_1(x, y)) + \dots$$

(32) $$\frac{\partial z_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} - \frac{\partial z_1}{\partial x}\right) + \dots$$

(33) $$\frac{\partial z_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y} - \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) + \dots$$

są jednostajnie zbieżne w prostokącie P. Oznaczając granicę szeregu (31) przez $z(x, y)$ i zauważając, że sumy częściowe szeregów (31), (32), (33) dają odpowiednio $z_n(x, y)$, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$, stwierdzamy, że funkcja $z(x, y)$ jest w prostokącie P klasy $C^{(1)}$, i że w tym prostokącie zachodzi następująca zbieżność jednostajna

(34) $$\lim_{n/\infty} z_n(x, y) = z(x, y), \quad \lim_{n/\infty} \frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{n/\infty} \frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Otrzymujemy tedy według (20), opierając się na (34) i przechodząc do granicy:

$$(35)\quad z(x,y)=z_0(x,y)+\int_a^x\int_c^y f\left(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\xi,d\eta.$$

Z ciągłości funkcji podcałkowej w (35) wynika, że istnieje $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ i że funkcja $z(x,y)$ spełnia w prostokącie P równanie (18); dalej z określenia funkcji $z_0(x,y)$ wynika, że funkcja $z(x,y)$ czyni zadość warunkom $z(a,y)=\psi(y)$ i $z(x,c)=\varphi(x)$.

W ten sposób udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia II.

Przypuśćmy, dla dowodu, że prócz całki $z(x,y)$ istnieje druga całka $\mathfrak{z}(x,y)$ spełniająca warunki twierdzenia II. Jest zatem:

$$(36)\quad \begin{gathered}\mathfrak{z}(a,y)=z(a,y)\qquad \frac{\partial \mathfrak{z}(a,y)}{\partial y}=\frac{\partial z(a,y)}{\partial y},\\ \text{oraz}\\ \mathfrak{z}(x,c)=z(x,c)\qquad \frac{\partial \mathfrak{z}(x,c)}{\partial x}=\frac{\partial z(x,c)}{\partial x}.\end{gathered}$$

Postaramy się ocenić różnicę $\mathfrak{z}(x,y)-z_n(x,y)$. Mamy najpierw:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\,\partial y}=f\left(x,y,\mathfrak{z}(x,y),\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x},\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right),$$

a zatem, oznaczając przez K_1 kres górny funkcji

$$\left|f\left(x,y,\mathfrak{z}(x,y),\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x},\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)\right|$$

w prostokącie P, otrzymujemy:

$$(37)\quad \begin{gathered}|\mathfrak{z}(x,y)-z_0(x,y)|\leqslant\\ \leqslant\int_a^x\int_c^y\left|f\left(\xi,\eta,\mathfrak{z}(\xi,\eta),\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \xi},\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta}\right)\right|d\xi\,d\eta\leqslant K_1(x-a)(y-c).\end{gathered}$$

W dalszym ciągu będzie:

$$(38)\quad \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}-\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|\leqslant\int_c^y\left|f\left(\xi,\eta,\mathfrak{z}(\xi,\eta),\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \xi},\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta}\right)\right|d\eta\leqslant K_1(y-c),$$

$$(39)\quad \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} - \frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqslant \int_a^x \left| f\left(\xi, \eta, \mathfrak{z}(\xi, \eta), \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta}\right)\right| d\xi \leqslant K_1(x-a).$$

Załóżmy, że dla pewnego całkowitego n zachodzą nierówności:

$$(40)\quad |\mathfrak{z}(x,y) - z_n(x,y)| \leqslant K_1 A^n (x-a)(y-c)[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^n,$$

$$(40')\quad \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \leqslant K_1 A^n (y-c)[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^n,$$

$$(40'')\quad \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} - \frac{\partial z_n}{dy}\right| \leqslant K_1 A^n (x-a)[[(x-a)(y-c)]^{1-\alpha} + (y-c)^{1-\alpha} + (x-a)^{1-\alpha}]^n,$$

nierówności te, jak wskazują wzory (37), (38), (39) zachodzą dla $n=0$.

Ponieważ:

$$(41)\quad |\mathfrak{z}(x,y) - z_{n+1}(x,y)| \leqslant \int_a^x \int_c^y \left| f\left(\xi, \eta, \mathfrak{z}(\xi,\eta), \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \eta}\right) - f\left(\xi, \eta, z_n(\xi,\eta), \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right)\right| d\xi\, d\eta,$$

przeto stosując do prawej strony (41) nierówności (19), (40), (40′) (40″), dochodzimy rachunkiem zupełnie podobnym do tego, którym uzyskaliśmy nierówności (24), (25) i (26), do wniosku, że nierówności (40), (40′) (40″) są słuszne dla każdego całkowitego n. Z zbieżności szeregu (30) wynika, po uwzględnieniu wzorów (40), (40′), (40″):

$$\lim_{n/\infty} |\mathfrak{z}(x,y) - z_n(x,y)| = 0, \qquad \lim_{n/\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial z_n}{\partial x}\right| = 0,$$

$$\lim_{n/\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} - \frac{\partial z_n}{\partial y}\right| = 0,$$

a zatem, wobec wzorów (36), możemy wywnioskować, że w prostokącie P zachodzi

$$(42)\quad \mathfrak{z}(x,y) = z(x,y).$$

Udowodniliśmy zatem twierdzenie II całkowicie.

§ 3.

Przejdźmy skolei do przypadku, w którym długości boków prostokąta, w którym poszukujemy rozwiązania (18), są dowolne.

Weźmy pod uwagę prostokąt $ABCD$, o bokach równoległych do osi układu; niech spółrzędne punktu A będą a i c, punktu $D(b\ d,)$, przyczem $a < b$, $c < d$. Zapytujemy, czy istnieje rozwiązanie równania (18) w $ABCD$, klasy $C^{(1)}$, przyczem rozwiązanie to ma się na AB redukować do zadanej funkcji $\varphi(x)$, a na AC do zadanej funkcji $\psi(y)$; funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ są klasy $C^{(1)}$ i spełniają warunek $\varphi(a) = \psi(c)$. O funkcji $f(x, y, z, p, q)$ z równania (18) zakładamy tyle, co w twierdzeniu II. (Do prostokąta $ABCD$ twierdzenia II stosować nie można, ponieważ długości jego boków przekraczać mogą, określoną w twierdzeniu II liczbę δ).

Podzielmy prostokąt $ABCD$ przy pomocy prostych $y = \mu_i$, równoległych do osi x i prostych $x = \lambda_j$ równoległych do osi y na skończoną ilość prostokątów o wymiarach nie większych od liczby δ_1, przyczem $0 < \delta_1 < \delta$. Przypuśćmy, że w ten sposób prostokąt $ABCD$ rozłożyliśmy na k pasm (poziomych), z których każde zawiera l prostokątów. Oznaczmy częściowy prostokąt, na jakie rozłożyliśmy $ABCD$ przez P_{ij} $(i = 1, \ldots k,\ j = 1, \ldots l)$, punkty P_{ij} posiadają spółrzędne, spełniające nierówności:

$$\text{(43)} \qquad \begin{array}{l} \lambda_{j-1} \leqslant x \leqslant \lambda_j \qquad (\text{przyczem } \lambda_0 = a,\ \mu_0 = c) \\ \mu_{i-1} \leqslant y \leqslant \mu_i . \end{array}$$

Ze sposobu konstrukcji prostokątów częściowych mamy:

$$\text{(44)} \qquad \begin{array}{l} \lambda_j - \lambda_{j-1} < \delta_1 \\ \mu_i - \mu_{i-1} < \delta_1 . \end{array}$$

Jak łatwo widać dla prostokąta P_{11} spełnione są warunki twierdzenia II, zatem istnieje i tylko jedno rozwiązanie równania (18) w P_{11}, spełniające żądane warunki brzegowe. Oznaczmy to rozwiązanie przez $z_{11}(x, y)$. Na prostej $y = \mu_1$ przyjmuje ono wartości $z(x, \mu_1)$, która to funkcja, jako funkcja zmiennej x, posiada ciągłą pierwszą pochodną. Spowodu ciągłości $z(x, y)$ zachodzi również $z(a, \mu_1) = \psi(\mu_1)$.

Zwróćmy się teraz do prostokąta P_{21}. Mamy: boki P_{21} są równoległe do osi układu, długości ich nie przekraczają $\delta_1 < \delta$, funkcje $z(x, \mu_1)$ i $\psi(y)$ są klasy $C^{(1)}$ w przedziałach $[a, \lambda_1]$, $[\mu_1, \mu_2]$ i zachodzi $z(a, \mu_1) = \psi(\mu_1)$, funkcja $f(x, y, z, p, q)$ spełnia w P_{21} założenia twierdzenia II, a zatem istnieje w P_{21} rozwiązanie równania (18), klasy $C^{(1)}$, które redukuje się dla $x = a$ do $\psi(y)$ i dla $y = \mu_1$, do $z(x, \mu_1)$, rozwiązanie to jest jedyne. Atoli z twierdzenia

II wynika, że rozwiązanie $z(x, y)$ ważne jest w obszarze obejmującym prostokąt P_{11}, np. w kwadracie K_{11} o boku równym δ i wierzchołku w A. Stąd zaś i z jednotliwości rozwiązania w kwadracie K_{11} wnioskujemy, że rozwiązania: $z_{11}(x, y)$ i rozwiązanie dla prostokąta P_{21} są dla wspólnej części kwadratu K_{11} i prostokąta P_{21} identyczne, a zatem istnieje i tylko jedno rozwiązanie klasy $C^{(1)}$ w obszarze złożonym z prostokątów P_{11} i P_{21}. W podobny sposób uzasadniamy, że rozwiązanie $z_{11}(x, y)$ daje się przedłużyć na prostokąt P_{12}. Jasnem jest, że wychodząc z prostokąta P_{21}, przedłużymy za pomocą kwadratu K_{21} o boku δ i wierzchołku w (a, μ_1) rozwiązanie istniejące w prostokątach P_{11} i P_{21} na prostokąt P_{31}, a w dalszym ciągu zapewnimy jedno i tylko jedno rozwiązanie w całej kolumnie prostokątów $\sum\limits_{i/1}^{k} P_{i1}$.

Zupełnie podobnie przedłużymy rozwiązanie z prostokąta P_{12} na prostokąt P_{22} i w dalszym ciągu na kolumnę prostokątów $\sum\limits_{i/1}^{k} P_{i2}$. W ten sposób wyczerpiemy skończoną ilością kolumn prostokątów $\sum\limits_{i/1}^{k} P_{ij}\,(j = 1 \ldots, l)$ prostokąt $ABCD$ i uzyskamy istnienie i jednotliwość rozwiązania w całym prostokącie $ABCD$.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie III. Przy zachowaniu założeń co do funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(y)$, wymienionych w twierdzeniu II, oraz ciągłości funkcji $f(x, y, z, p, q)$ w zbiorze T, określonym w twierdzeniu II, jednakowoż bez warunków $b - a < \delta$, $d - c < \delta$ i przy zachowaniu nierówności (19), równanie (18) posiada w prostokącie P (dowolnym o bokach równoległych do osi układu spółrzędnych) jedno i tylko jedno rozwiązanie klasy C^1 — $z(x, y)$, dla którego dla $x = a$ zachodzi $z(a, y) = \psi(y)$ i dla $y = c$ zachodzi $z(x, c) = \varphi(x)$.

§ 4.

Przechodzimy teraz do problemu drugiego, w którym zadajemy zgóry wartości rozwiązania równania (18) na krzywej spełniającej określone warunki. Warunki te są następujące: krzywa K łączy punkty wierzchołkowe prostokąta, o spółrzędnych (a, c), (b, d) przyczem $a < b$, $c < d$, posiada w ciągły sposób zmieniającą się styczną, nierównoległą do żadnej z osi układu; równanie jej może być na-

pisane w odniesieniu do prostokątnego układu osi w postaci $y = \lambda(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ lub $x = \mu(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$. W dalszym ciągu krzywą spełniającą powyższe warunki oznaczać będziemy krótko krzywą K^*.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie pomocnicze IV. Niech funkcja f, występująca w równaniu (18), będzie ciągłą w zbiorze T określonym przez zespół warunków (T) podanych w twierdzeniu II, niech ponadto spełnia w zbiorze (T') określonym przez warunki

$$(45) \quad \begin{array}{l} x,\ y \text{ są spółrzędnemi punktu należącego do } (P - K^*) \\ z,\ p,\ q \text{ dowolne} \end{array}$$

nierówność

$$(46) \quad \begin{gathered} |f(x, y, z, p, q) - f(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})| \leqslant \\ \leqslant A\left(\frac{|z - \bar{z}|}{|x - \mu(y)|^{\alpha}\,|y - \lambda(x)|^{\alpha}} + \frac{|p - \bar{p}|}{|y - \lambda(x)|^{\alpha}} + \frac{|q - \bar{q}|}{|x - \mu(y)|^{\alpha}}\right) \end{gathered}$$

gdzie A oznacza stałą dodatnią i $0 < \alpha < 1$,

prócz tego niech będą spełnione związki $b - a < \delta$, $d - c < \delta$, gdzie a, b, c, d i δ mają takie znaczenie, jak w twierdzeniu II,

niech wreszcie funkcje $\varphi(z)$ i $\psi(y)$ będą klasy $C^{(1)}$ w przedziałach $[a, b]$ i $[c, d]$.

Przy tych założeniach równanie (18) posiada jedną i tylko jedną całkę $z(x, y)$ w prostokącie (P), klasy $C^{(1)}$, dla której wzdłuż krzywej K^* zachodzi:

$$z(x, \lambda(x)) = \varphi(x) + \psi(\lambda(x)).$$

Dowód poprowadzimy metodą kolejnych przybliżeń. Weźmy dowolny punkt $R(x, y)$ prostokąta P nie leżący na krzywej K^*. Poprowadźmy z niego proste: równoległą do osi x i równoległą do osi y; punkty przecięcia się tych prostych z krzywą K^* będą miały spółrzędne: pierwszy $(\mu(y), y)$, drugi $(x, \lambda(x))$. Wspomniane proste i łuk krzywej K^* ograniczają obszar leżący w prostokącie P i położony z tej samej strony krzywej K^* co i punkt $R(x, y)$; oznaczmy ten obszar przez $G_{x,y}$. Obszar ten jest normalny względem obu osi, wobec czego jeżeli $g(x, y)$ jest funkcją ciągłą w $G_{x,y}$ ma sens $\int_x^{\mu(y)} \int_y^{\lambda(x)} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$.

Weźmy za pierwszą funkcję ciągu kolejnych przybliżeń funkcję:

(47) $$z_0(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

jest ona ciągła w P i spełnia wzdłuż krzywej K^* wymieniony w twierdzeniu warunek. Następne funkcje ciągu określamy przez wzór:

(48) $$z_n(x,y) = z_0(x,y) + \int_x^{\mu(y)} \int_y^{\lambda(x)} f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi,\eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta$$

(dla $n = 1, 2, \ldots$).

Całka występująca w (48) ma sens spowodu ciągłości funkcji podcałkowej, funkcje $\mu(y)$ i $\lambda(x)$ są ciągłe, a więc funkcje $z_n(x, y)$ dane przez wzór (48) są klasy $C^{1)}$ w P, a ze względu na (47) spełniają wzdłuż K^* warunek wymieniony w twierdzeniu.

Z ciągłości funkcji f we wzorze (48) wynika, że $z_n(x, y)$ posiada w $G_{x,y}$ ciągłe pochodne cząstkowe dane wzorami:

(49) $$\frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} + \int_y^{\lambda(x)} f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi, \eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) d\eta,$$

(50) $$\frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial \eta} + \int_x^{\mu(y)} f\left(\xi, \eta, z_{n-1}(\xi, \eta), \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}\right) \partial \xi,$$

Oznaczając przez M, kres górny funkcji $|f|$ w P, dostajemy z wzorów (48), (49), (50) następujące nierówności:

(51) $$|z_1(x, y) - z_0(x, y)| \leqslant |x - \mu(y)|\, |y - \lambda(x)|\, M,$$

(51′) $$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leqslant |y - \lambda(x)|\, M,$$

(51″) $$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqslant |x - \mu(y)|\, M.$$

Załóżmy teraz, że nierówności:

(52) $$|z_n - z_{n-1}| \leqslant M A^{n-1} |x - \mu(y)|\, |y - \lambda(x)|\, [[|x - \mu(y)|\, |y - \lambda(x)|]^{1-\alpha} + |y - \lambda(x)|^{1-\alpha} + |x - \mu(y)|^{1-\alpha}]^n,$$

(52′) $$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| \leqslant M A^{n-1} |y - \lambda(x)|\, [[|x - \mu(y)|\, |y - \lambda(x)|]^{1-\alpha} + |y - \lambda(x)|^{1-\alpha} + |x - \mu(y)|^{1-\alpha}]^n,$$

(52″) $$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right| \leqslant M A^{n-1} |x - \mu(y)|\, [[|x - \mu(y)|\, |y - \lambda(x)|]^{1-\alpha} + |y - \lambda(x)|^{1-\alpha} + |x - \mu(y)|^{1-\alpha}]^n,$$

zachodzą dla pewnego całkowitego n. Rachunkiem zupełnie podobnym do tego, którym w § 2, uzasadniliśmy, wychodząc z nierówności (23), (23'), (23''), nierówności (24), (25), (26), powołując się na nierówność (46), stwierdzamy, że nierówności (52), 52'), (52'') słuszne są dla $n+1$, a zatem, wobec (51), (51'), (51''), że są słuszne dla każdego całkowitego n, od jedności począwszy.

Przenosząc początek układu spółrzędnych do punktu o spółrzędnych $\mu(y)$, y, i nie zmieniając kierunku osi stwierdzimy, podobnie jak w § 2, że w obszar ograniczony osiami i łukiem krzywej o równaniu:

$$(|x||\lambda(x)|)^{1-\alpha}+|\lambda(x)|^{1-\alpha}+|x|^{1-\alpha}=\frac{1}{A} \tag{53}$$

i położony w pierwszej ćwiartce układu spółrzędnych, można wpisać kwadrat, którego jeden wierzchołek leży w początku układu, a przeciwległy mu na krzywej o równaniu (53). Na odciętą wierzchołka kwadratu leżącego na krzywej otrzymujemy znów liczbę $\bar{\xi}$ daną przez (29). Rozumowanie takie, jak w § 2, doprowadza do wniosku, że i teraz szeregi (31), (32), (33) są w prostokącie P jednostajnie zbieżne, a zatem oznaczając granicę szeregu (28) przez $z(x, y)$ i przechodząc we wzorze (48) z n do granicy, dostajemy:

$$z(x,y)=z_0(x,y)+\int\limits_x^{\mu(y)}\int\limits_y^{\lambda(x)} f\left(\xi,\eta,z(\xi,\eta),\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\xi\, d\eta. \tag{54}$$

Z ciągłości funkcji podcałkowej w wzorze (54) i określenia funkcji $z_0(x, y)$ wynika, że funkcja $z(x, y)$ spełnia w P równanie (18), jest klasy $C^{(1}$ i czyni zadość wymaganym warunkom wzdłuż krzywej K^*.

Dowód jednotliwości rozwiązania przebiegu zupełnie podobnie jak w twierdzeniu II: zamiast nierówności (19) używamy tylko nierówności (46).

Wreszcie i w tym przypadku możemy uzyskać twierdzenie w odniesieniu do prostokąta, którego wymiary nie podlegają ograniczeniom. Mianowicie, podobnie jak w § 3, dzielimy zadany prostokąt o wymiarach dowolnych na prostokąty, których wymiary nie przekraczają liczby δ_1, przyczem $0<\delta_1<\delta$ i δ oznacza liczbę określoną w twierdzeniu II.

Podział ten uskuteczniamy w następujący sposób: pokrywamy krzywą K^* skończoną ilością prostokątów, o bokach nieprzekra-

czających δ_1 tak, że krzywa K^* łączy w każdym z nich przeciwległe wierzchołki i dwa prostokąty z pokrywających krzywą K^* posiadają conajmniej jeden punkt wspólny (wierzchołek); przedłużając boki prostokątów pokrywających K^* aż do przecięcia z bokami zadanego prostokąta, otrzymujemy podział danego postokąta na prostokąty o wymiarach nieprzekraczających δ_1. Dalej dowodzimy istnienia i jednotliwości rozwiązania (8) w całym prostokącie tak, jak w § 3.

W ten sposób uzyskujemy:

Twierdzenie V. Zachowując założenia twierdzenia IV z pominięciem założenia ograniczającego długości boków prostokąta P, mamy: równanie (18) posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie klasy $C^{(1}$ w prostokącie P, przyczem, jeżeli oznaczymy je przez $z(x, y)$, to wzdłuż krzywej K^* zachodzi:

$$z(x, \lambda(x)) = \varphi(x) + \psi(\lambda(x)).$$
